

ЗАДАЧИ

Кангур
2010

Для решения задач отводится 75 минут

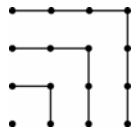
11-ый класс

- калькулятором пользоваться не разрешается
- для каждой задачи только один из приведенных пяти ответов является верным
- за нерешенную задачу очки не отнимаются и не прибавляются
- участник конкурса может набрать максимально 120 баллов
- после завершения конкурса листок с задачами остается у участника
- главное требование от участников и организаторов конкурса – выполнить задания самостоятельно и честно.

Задачи, оцениваемые в 3 балла

1. Пользуясь рисунком, можно сказать, что $1 + 3 + 5 + 7 = 4 \times 4$. Чему равна сумма $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17$?

- (A) 14×14 (B) 9×9 (C) $4 \times 4 \times 4$ (D) 16×16 (E) 4×9



2. Какое число стоит на месте \clubsuit , если известно, что суммы чисел в обоих строках равны друг другу?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	2010
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	\clubsuit

- (A) 1010 (B) 1020 (C) 1910 (D) 1990 (E) 2020

3. Площади оснований двух кубов равны 1 дм^2 и 4 дм^2 . Мы хотим заполнить родниковой водой большой куб, принося воду из родника в маленьком кубе. Сколько раз нам придется пойти к роднику?

- (A) 2 раза (B) 4 раза (C) 6 раз (D) 8 раз (E) 16 раз

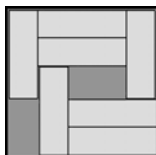
4. Сколько четырехзначных чисел, состоящих только из нечетных цифр, делятся на пять?

- (A) 900 (B) 625 (C) 250 (D) 125 (E) 100

5. Директор компании сказал «Каждому нашему сотруднику как минимум 25 лет». Потом оказалось, что он был неправ. Это значит, что

- (A) всем сотрудникам компании ровно 25 лет
(B) всем сотрудникам компании больше 26-и лет
(C) никому из сотрудников компании еще нет 25-и лет
(D) хотя бы одному сотруднику компании меньше 25-и лет
(E) одному из сотрудников компании ровно 26 лет

6. В коробке уложено 7 прямоугольников размером $3 \text{ см} \times 1 \text{ см}$. Мы хотим переместить скольжением прямоугольники в ящике и освободить место еще для одного прямоугольника. Какое наименьшее число прямоугольников надо при этом переместить?



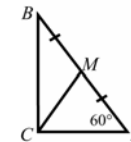
- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) невозможно

7. Какое из приведенных чисел может быть числом ребер некоторой призмы?

- (A) 100 (B) 200 (C) 2008 (D) 2009 (E) 2010

8. В прямоугольном треугольнике ABC точка M – середина гипотенузы AB , $\angle A = 60^\circ$; $\angle BMC =$

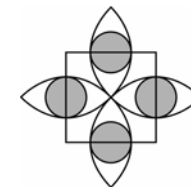
- (A) 105° (B) 108° (C) 110° (D) 120° (E) 125°



9. Сколько существует двузначных чисел \overline{xu} , цифры x и u которых удовлетворяют условию $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 0$?

- (A) 1 (B) 2 (C) 6 (D) 32 (E) ни одного

10. Сторона квадрата на рисунке равна 2, полуокружности проходят через центр квадрата, а их центры находятся в вершинах квадрата. Центры затененных кругов находятся на сторонах квадрата, а их окружности касаются полуокружностей. Чему равна площадь затененной части?



- (A) $4(3 - 2\sqrt{2})\pi$ (B) $\sqrt{2}\pi$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$ (D) π (E) $\frac{1}{4}\pi$

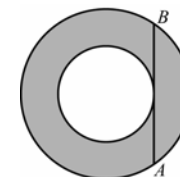
Задачи, оцениваемые в 4 балла

11. Числа $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[6]{7}$ являются последовательными членами геометрической прогрессии. Следующим членом этой прогрессии является число

- (A) $\sqrt[9]{7}$ (B) $\sqrt[12]{7}$ (C) $\sqrt[5]{7}$ (D) $\sqrt[10]{7}$ (E) 1

12. Хорда AB касается меньшей из двух concentрических окружностей. Известно, что $AB = 16$: Чему равна площадь затененной части фигуры?

- (A) 32π (B) 63π (C) 64π (D) $32\pi^2$
(E) зависит от радиусов окружностей

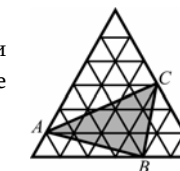


13. Целые числа x и y удовлетворяют условию $2x = 5y$. Которое из приведенных чисел может равняться сумме $x + y$?

- (A) 2011 (B) 2010 (C) 2009 (D) 2008 (E) 2007

14. На рисунке наибольший равносторонний треугольник состоит из 36-и маленьких равносторонних треугольников площадью 1 см^2 . Найдите площадь $\triangle ABC$.

- (A) 11 см^2 (B) 12 см^2 (C) 15 см^2 (D) 9 см^2 (E) 10 см^2

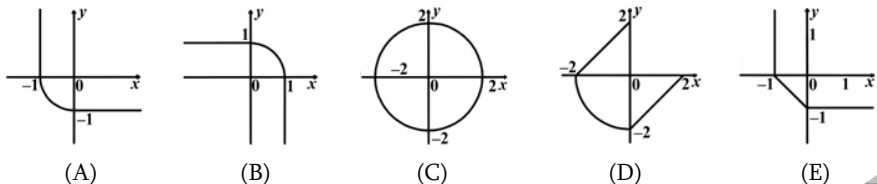


15. В мешке имеются шары трех цветов: синие, зеленые и красные (имеется по крайней мере один шар каждого цвета). Известно, что если с закрытыми глазами вытащить любые пять шаров, то среди них обязательно будет два красных шара и не меньше трех будут одного цвета. Сколько синих шаров в мешке?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(E) невозможно ответить без дополнительной информации

16. Какой из графиков соответствует множеству решений уравнения $(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4$?



17. Сколько прямоугольных треугольников можно получить, соединя три вершины правильного 14-угольника?

- (A) 42 (B) 84 (C) 88 (D) 98 (E) 168

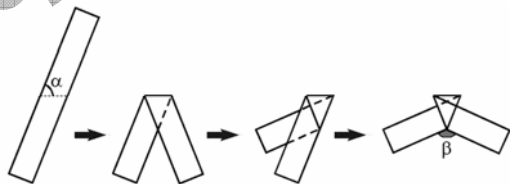
18. В выражении $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10$ каждый знак $*$ заменяется на «+» или «x». Пусть N возможное наибольшее число, которое можно получить этим способом. Чему равен наименьший простой делитель числа N ?

- (A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) иное число

19. Длины сторон треугольника в сантиметрах являются натуральными числами 13, x и y . Найдите периметр треугольника, если $xy = 105$.

- (A) 35 (B) 39 (C) 51 (D) 69 (E) 119

20. Полоску бумаги складывают три раза, как показано на рисунке. Найдите угол β , если $\alpha = 70^\circ$.

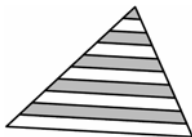


- (A) 140° (B) 130° (C) 120°
(D) 110° (E) 100°

Задачи, оцениваемые в 5 баллов

21. Прямыми линиями, параллельными основанию, каждая из боковых сторон треугольника разделена на 10 равных частей. Какой процент площади треугольника закрашен?

- (A) 42,5% (B) 45% (C) 46% (D) 47,5% (E) 50%



22. В забеге участвовало 100 человек и никакие двое не пришли к финишу одновременно. Всех участников спросили, каким номером они пришли к финишу и они назвали числа от 1 до 100. Сумма всех названных чисел составила 4000. Какое наименьшее число бегунов сказали неправду?

- (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

23. Игральную кость бросают три раза. Известно, что в третий раз выпала цифра, равная сумме двух предыдущих. Какова вероятность того, что цифра 2 выпадала по крайней мере один раз?

- (A) 1/6 (B) 91/216 (C) 1/2 (D) 8/15 (E) 7/12

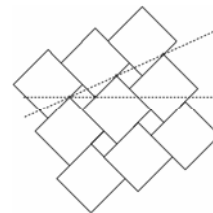
24. Штрих-код, показанный на рисунке, состоит из последовательных белых и черных полос, и всегда начинается и заканчивается черной полосой. Полосы любого цвета имеют ширину 1 или 2, а общая длина штрих-кода



равна 12. Сколько различных вариантов штрих-кодов можно получить, если все они читаются слева направо?

- (A) 24 (B) 132 (C) 66 (D) 12 (E) 116

25. Стена облицована кафелем двух размеров, как показано на рисунке. Сторона большего кафеля равна a , меньшего — b : Угол, образованный горизонтальными и наклонными штрихованными линиями, равен 30° . Найдите отношение $a:b$.



- (A) $2\sqrt{3} : 1$ (B) $(2 + \sqrt{3}) : 1$ (C) $(3 + \sqrt{2}) : 1$ (D) $3\sqrt{2} : 1$ (E) $2 : 1$

26. На доске написаны натуральные числа от 1 до 10, каждое по 10 раз. Ученики играют в игру: ученик стирает два числа и записывает на доске число, которое на единицу меньше суммы стертых им чисел. Следующий ученик снова стирает два числа и пишет на доске число, которое на единицу меньше суммы стертых им чисел, и так далее. Игра заканчивается, когда на доске остается одно число. Последнее число на доске

- (A) меньше 440 (B) 451 (C) 460 (D) 488 (E) больше 500

27. Значение выражения $\frac{(2+3)(2^2+3^2)\dots(2^{1024}+3^{1024})(2^{2048}+3^{2048})+2^{4096}}{3^{2048}}$ равно

- (A) 2^{2048} (B) 2^{4096} (C) 3^{2048} (D) 3^{4096} (E) $3^{2048} + 2^{2048}$

28. Число $\sqrt{\frac{0,44\dots4}{100 \text{ раз}}}$ записано в виде бесконечной десятичной дроби. Какая цифра стоит в этом числе на 100-м месте после запятой?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6

29. Функция $f(x)$ для всех $x \in R, x > 0$ удовлетворяет уравнению $2f(x) + 3f\left(\frac{2010}{x}\right) = 5x$.

$f(6) = \dots$

- (A) 993 (B) 1 (C) 2009 (D) 1013 (E) 923

30. На катетах прямоугольного треугольника, длины которых равны a и b , выбраны точки P и Q , соответственно. Пусть K и H являются основаниями перпендикуляров, опущенных на гипотенузу из точек P и Q , соответственно. Найдите возможное наименьшее значение суммы $KP + PQ + QH$.

- (A) $a + b$ (B) $\frac{2ab}{a + b}$ (C) $\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (D) $\frac{(a + b)^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (E) $\frac{(a + b)^2}{2ab}$